TD n° 9 – Le théorème des géodésiques primitives

L'objectif de cette feuille de TD est de démontrer le *théorème des géodésiques primitives*, ou *prime geodesic theorem.* Soit $S = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ une surface hyperbolique compacte. Pour tout x, on note $\pi(x)$ le nombre de géodésiques fermées primitives γ telles que $\ell(\gamma) \leq \log(x)$. L'énoncé du théorème est que pour x assez grand,

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \sum_{1>r_j>\frac{3}{4}} \mathrm{li}(x^{r_k}) + O\left(\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\log(x)}\right), \tag{1}$$

où li est le logarithme intégral

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

Notons que $\mathrm{li}(x) \sim \frac{x}{\log x}$ quand $x \to \infty$.

On introduit un certain nombre de fonctions auxiliaires.

— Soit ϕ une fonction lisse paire et positive à support dans $[-1, 1]$ telle que $\int_{-1}^{1} \phi(x)dx = 1$. On pose
$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\phi(\frac{x}{\varepsilon}).$$

— Pour tout $T > 0$, on pose
$$g_T(x) = 2\cosh(\frac{x}{2})\mathbf{1}_{[-T,T]}(x), \quad H(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma\in\mathcal{G}(S)} \frac{\ell(\gamma)g_T(n\ell(\gamma))}{\sinh(\frac{n}{2}\ell(\gamma))}.$$

— Pour $T > 0$ et $\varepsilon > 0$ fixés, on pose également
$$g_T^\varepsilon(x) = (g_T * \phi_\varepsilon)(x), \quad H_\varepsilon(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\gamma\in\mathcal{G}(S)} \frac{\ell(\gamma)g_T^\varepsilon(n\ell(\gamma))}{\sinh(\frac{n}{2}\ell(\gamma))}.$$

Exercice 1. *Étude de $H_\varepsilon(T)$*

1. Calculer la transformée de Fourier h_T^ε de g_T^ε.
2. Montrer, en utilisant la formule des traces, que
$$H_\varepsilon(T) = \sum_{r_i\in i\mathbb{R}} h_T^\varepsilon(r_i) + \int_0^\infty h_T^\varepsilon(r)dm(r),$$
où $dm(r)$ est la mesure sur $\mathbb{R}_+$ définie par
$$dm(r) = \sum_{0<r_i\leq r} \delta_{r_i} - \frac{\mathrm{Aire}(S)}{2\pi} r\tanh(\pi r)dr.$$
3. Montrer que
$$\sum_{r_i\in i\mathbb{R}} h_T^\varepsilon(r_i) = e^T + \sum_{1>s_j>\frac{3}{4}} \frac{e^{Ts_j}}{s_j} + O(\varepsilon e^{3T/4}).$$
4. Montrer que
$$\int_0^\infty h_T^\varepsilon(r)dm(r) = O(e^{3T/4}).$$

Exercice 2. *Étude de $H(T)$*

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$H_\varepsilon(T-\varepsilon) \leq H(T) \leq H_\varepsilon(T+\varepsilon).$$

2. En déduire que, pour T assez grand,

$$H(T) = e^T + \sum_{1>s_j>\frac{3}{4}} \frac{e^{Ts_j}}{s_j} + O(e^{3T/4}).$$

Exercice 3. *Démonstration du théorème*

1. On pose

$$\psi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{G}(S)\\ n\ell(\gamma)\leq T}} \ell(\gamma).$$

   Montrer que, lorsque $T \to \infty$,

$$H(T) = \psi(T) + o(\psi(T)).$$

2. Montrer que

$$\psi(T) = e^T + \sum_{1>s_j>\frac{3}{4}} \frac{e^{Ts_j}}{s_j} + O(e^{3T/4}).$$

3. Montrer que

$$\psi(T) = \theta(T) + \theta(T/2) + \ldots + \theta(T/k),$$

   où

$$\theta(T) = \sum_{\substack{\gamma\in\mathcal{G}(S)\\ \ell(\gamma)\leq T}} \ell(\gamma),$$

   et $k \geq T/\ell_1$, où ℓ_1 est la longueur de la plus petite géodésique fermée sur S. En déduire que

$$\theta(T) = e^T + \sum_{1>s_j>\frac{3}{4}} \frac{e^{Ts_j}}{s_j} + O(e^{3T/4}).$$

4. En déduire le théorème.

Note : Le théorème des géodésiques primitives admet un analogue en théorie des nombres, où la fonction de comptage de géodésiques fermées primitives est remplacée par la fonction de comptage des nombres premiers.